

Решение тригонометрических уравнений

Конспект урока для 10 и 11 классов

Цель урока: научиться распознавать тип тригонометрического уравнения, находить все его корни и отбирать корни по условию задачи.

В конспекте разобраны задания из листов «Тригонометрические уравнения. Вариант 1» и «Работа 7. Вариант 2». Нумерация исходных заданий сохранена в подписях к примерам. Все углы в решениях выражены в радианах.

План урока на 90 минут

Время	Содержание	Результат
0–10 мин	Окружность, значения функций и знаки	Ученик находит точки по значению $\sin$ или $\cos$
10–25 мин	Общие формулы и частные случаи	Записывает все корни простейшего уравнения
25–40 мин	Сложный аргумент и выбор одного корня	Решает примеры 1 и 3
40–55 мин	Разложение на множители	Решает пример 4 и отбирает корни
55–70 мин	Замена переменной	Решает пример 6 с проверкой ограничения
70–85 мин	Самостоятельная работа	Выполняет задания 1, 3 и 4
85–90 мин	Обсуждение ошибок и домашнее задание	Объясняет выбранный способ решения

Условие проведения: формулы приведения и двойного угла уже знакомы. Если тема изучается впервые, материал лучше разделить на два урока: простейшие уравнения и сложный аргумент; затем преобразования и отбор корней.

Резерв и усложнение: примеры 2, 5 и 7, самостоятельные задания 2, 5 и 6. Их можно использовать на втором уроке или дать сильной группе.

Вопросы для начала урока

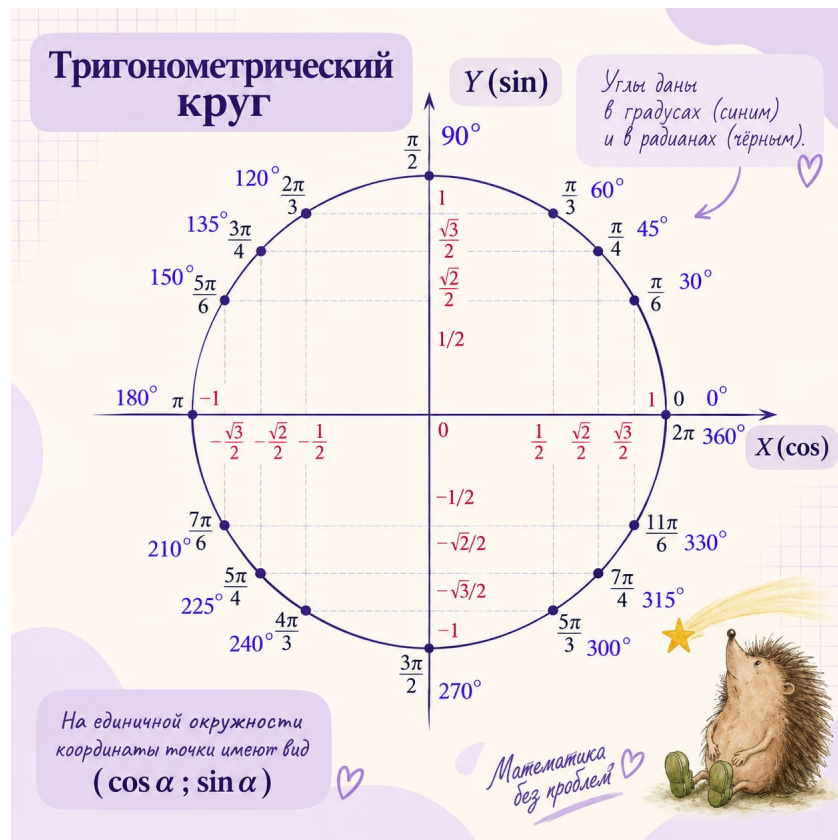
1. Какая координата точки окружности равна косинусу, а какая синусу?
2. Почему уравнение $\sin x = \frac{3}{2}$ не имеет решений?
3. Почему в ответах встречаются слагаемые $2\pi n$ и πn ?
4. Что означает условие $n \in \mathbb{Z}$?

Ожидаемые ответы: координаты точки имеют вид $(\cos x; \sin x)$; значения синуса лежат от -1 до 1 ; полные обороты и периодичность дают повторение значений; n принимает любые целые значения. Шаг между корнями конкретного уравнения может отличаться от основного периода функции.

Вопрос для итога урока: как по записи уравнения выбрать группировку или замену переменной? Обоснуйте выбор на одном примере.

Единичная окружность

Единичная окружность имеет радиус 1 и центр в начале координат. Угол отсчитывают от положительного направления горизонтальной оси: против часовой стрелки для положительных углов и по часовой стрелке для отрицательных.



Тригонометрическая окружность из учебных материалов

Точке угла x соответствуют координаты $(\cos x; \sin x)$. Поэтому:

- для уравнения $\sin x = a$ ищем точки на горизонтальной прямой $y = a$;
- для уравнения $\cos x = a$ ищем точки на вертикальной прямой с абсциссой a ;
- каждый полный оборот добавляет к углу 2π и возвращает нас в ту же точку.

Пример чтения окружности. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, в пределах одного оборота получаем углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Все решения:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Важно: точка на окружности обозначает бесконечно много углов. При отборе на отрезке учитываем число полных оборотов, а не только положение точки.

Простейшие тригонометрические уравнения

Здесь u обозначает весь аргумент функции: например, $u = 3x - \frac{\pi}{4}$. Во всех формулах $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение	Условие	Все решения
$\sin u = a$	$ a \leq 1$	$u = (-1)^n \arcsin a + \pi n$
$\cos u = a$	$ a \leq 1$	$u = \pm \arccos a + 2\pi n$
$\operatorname{tg} u = a$	$a \in \mathbb{R}$	$u = \operatorname{arctg} a + \pi n$
$\operatorname{ctg} u = a$	$a \in \mathbb{R}$	$u = \operatorname{arcctg} a + \pi n$

Для синуса удобно использовать и две серии: $u = \arcsin a + 2\pi n$ или $u = \pi - \arcsin a + 2\pi n$. Если $|a| > 1$, уравнения с синусом и косинусом решений не имеют.

Главные значения: $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos a \in [0; \pi]$, $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Здесь используется соглашение $\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$.

Частные случаи нужно узнавать сразу

Уравнение	Все решения	Уравнение	Все решения
$\sin u = 0$	$u = \pi n$	$\cos u = 0$	$u = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$\sin u = 1$	$u = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\cos u = 1$	$u = 2\pi n$
$\sin u = -1$	$u = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\cos u = -1$	$u = \pi + 2\pi n$

Также $\operatorname{tg} u = 0 \Rightarrow u = \pi n$ и $\operatorname{ctg} u = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Область допустимых значений

- $\sin u$ и $\cos u$ определены при любом действительном u .
- Для $\operatorname{tg} u$ необходимо $\cos u \neq 0$, то есть $u \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.
- Для $\operatorname{ctg} u$ необходимо $\sin u \neq 0$, то есть $u \neq \pi k$.
- Если в уравнении есть дробь, её знаменатель должен быть отличен от нуля.

Как работать со сложным аргументом

Сначала запишите формулу для всего аргумента, затем решите полученное линейное уравнение. При делении на коэффициент делите каждое слагаемое, включая периодическую часть.

$$\sin\left(8x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow 8x + \frac{\pi}{8} = \pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{64} + \frac{\pi n}{8}.$$

Преобразования и выбор способа решения

Формулы для заданий из рабочих листов

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \sin 2x = 2 \sin x \cos x. \\ \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1. \\ \sin(-x) &= -\sin x, \cos(-x) = \cos x. \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x. \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= -\cos x, \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \\ \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) &= -\sin x, \cos(2\pi - x) = \cos x. \\ \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) &= \cos x, \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x.\end{aligned}$$

Для нестандартного сдвига используем формулу разности:

$$\cos(x - \alpha) = \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha.$$

Как увидеть способ

Что видим в уравнении	Что пробуем
Одна функция от линейного аргумента	Формулу простейшего уравнения
$\sin 2x$ вместе с $\sin x$ и $\cos x$	Двойной угол и разложение на множители
Общий множитель у нескольких слагаемых	Вынесение множителя или группировку
Степени одной функции	Замену $t = \sin x$, $t = \cos x$ или $t = \operatorname{tg} x$
$\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ одновременно	Основное тождество для перехода к одной функции

Общий порядок решения

1. Установите ОДЗ и упростите аргументы по формулам приведения.
2. Преобразуйте уравнение и выберите метод.
3. Найдите все серии корней. Для $t = \sin x$ и $t = \cos x$ проверьте $-1 \leq t \leq 1$.
4. Учтите ОДЗ. Если задан промежуток, отберите корни из каждой серии.
5. Удалите повторяющиеся значения и запишите ответ.

Правило произведения: $A(x)B(x)=0$ означает $A(x)=0$ или $B(x)=0$ в общей области определения. На выражение с неизвестной нельзя делить, пока не проверен случай, когда оно равно нулю.

Простейшие уравнения со сложным аргументом

Пример 1 Косинус равен единице

Лист «Вариант 1», № 1. Найдите наибольший отрицательный корень.

$$\cos \frac{\pi(x-15)}{6} = 1.$$

Используем частный случай $\cos u = 1$:

$$\frac{\pi(x-15)}{6} = 2\pi n \Rightarrow x = 15 + 12n, n \in \mathbb{Z}.$$

Требуется $15 + 12n < 0$, то есть $n < -\frac{5}{4}$. Наибольшее подходящее целое значение $n = -2$. Получаем $x = -9$; при следующем $n = -1$ корень уже положителен. **Ответ:** -9 .

Пример 2 Тангенс равен отрицательному числу

Лист «Вариант 1», № 4. Найдите наибольший отрицательный корень.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x-15)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, имеем:

$$\frac{\pi(x-15)}{3} = -\frac{\pi}{6} + \pi n \Rightarrow x = \frac{29}{2} + 3n.$$

Из $\frac{29}{2} + 3n < 0$ получаем $n < -\frac{29}{6}$. Наибольшее подходящее целое $n = -5$, поэтому **ответ:** $-\frac{1}{2}$.

Пример 3 Синус и две серии корней

Лист «Вариант 1», № 8. Найдите наибольший отрицательный корень.

$$\sin \frac{\pi(x-15)}{12} = -\frac{1}{2}.$$

На окружности подходят углы $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$ с добавлением полных оборотов:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x-15)}{12} &= -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } \frac{\pi(x-15)}{12} = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n. \\ x &= 13 + 24n \text{ или } x = 29 + 24n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

В первой серии наибольший отрицательный корень равен -11 при $n = -1$. Во второй серии он равен -19 при $n = -2$. Сравниваем: $-11 > -19$. **Ответ:** -11 .

Запомните: наибольший отрицательный корень ближе всех отрицательных корней к нулю. Если серий несколько, сначала найдите кандидата в каждой, затем сравните их.

Разложение на множители и отбор корней

Пример 4 Общий множитель

Лист «Работа 7. Вариант 2», № 2. Решите уравнение и найдите его корни на $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin 2x.$$

По формулам приведения и двойного угла:

$$\cos x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos x (1 - 2 \sin x) = 0.$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Все решения, где $k, n, m \in \mathbb{Z}$ независимо:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m.$$

Отбор через двойные неравенства для каждой серии:

Серия	Условие для параметра	Корни на отрезке
$\frac{\pi}{2} + \pi k$	$-\frac{3}{2} \leq k \leq 0$	$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{6} + 2\pi n$	$-\frac{7}{12} \leq n \leq \frac{1}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$	$-\frac{11}{12} \leq m \leq -\frac{1}{6}$	Нет целых m

Например, первая строка получается из $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq \frac{\pi}{2}$. **Ответ для отрезка:** $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

Почему нельзя делить на $\cos x$? Тогда пропадёт вся серия $\cos x = 0$, в том числе два корня на заданном отрезке.

Пример 5 Группировка слагаемых

Лист «Работа 7. Вариант 2», № 4. Отберите корни на $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x + 2\sqrt{3} \sin x &= 2 \cos x + \sqrt{3}. \\ 2 \cos x (2 \sin x - 1) + \sqrt{3} (2 \sin x - 1) &= 0. \\ (2 \sin x - 1)(2 \cos x + \sqrt{3}) &= 0. \end{aligned}$$

На отрезке: $-\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$. Все решения, с удалением повторов:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Замена переменной

Пример 6 Квадратное уравнение относительно косинуса

Лист «Работа 7. Вариант 2», № 22. Отберите корни на $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$.

$$6\cos^2 x + 11\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 7 = 0.$$

Применяем формулу приведения:

$$6\cos^2 x - 11\cos x - 7 = 0.$$

Вводим $t = \cos x$, обязательно указываем $-1 \leq t \leq 1$.

$$6t^2 - 11t - 7 = 0, D = 121 + 168 = 289 = 17^2.$$

$$t_1 = \frac{11+17}{12} = \frac{7}{3}, t_2 = \frac{11-17}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Значение $t_1 = \frac{7}{3}$ недопустимо. Из $\cos x = -\frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Для серии $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ условие отрезка даёт $\frac{17}{12} \leq n \leq \frac{13}{6}$, поэтому $n=2$ и $x = \frac{14\pi}{3}$. Для серии $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ получаем $\frac{25}{12} \leq n \leq \frac{17}{6}$; целых n нет. **Ответ для отрезка:** $\frac{14\pi}{3}$.

Пример 7 Кубическое уравнение относительно тангенса

Лист «Работа 7. Вариант 2», № 12. Отберите корни на $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Пусть $t = \operatorname{tg} x$. Для t допустимы все действительные значения.

$$t^3 + t^2 - 3t - 3 = t^2(t+1) - 3(t+1) = (t+1)(t^2 - 3) = 0.$$

Отсюда $t = -1$ или $t = \pm\sqrt{3}$. Все решения:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Все серии удовлетворяют ОДЗ. Отбор: в первой серии $n=3$; в серии $\frac{\pi}{3} + \pi k$ значения $k=2, 3$; в серии $-\frac{\pi}{3} + \pi k$ значение $k=3$.

Ответ для отрезка: $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{4}; \frac{10\pi}{3}$. Правая граница $\frac{7\pi}{2}$ не входит в ОДЗ, хотя сам отрезок замкнутый.

Самостоятельная работа

Для основного маршрута выполните задания **1, 3 и 4**. Задания **2, 5 и 6** используйте для дополнительной практики. В заданиях 3-6 запишите все решения; в заданиях 4-6 также выполните отбор.

1. Найдите наибольший отрицательный корень: $\cos \frac{\pi x}{4} = -1$.
2. Найдите наименьший положительный корень: $\operatorname{tg} \frac{\pi(x-4)}{3} = 0$.
3. Решите уравнение: $\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Решите $\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) = \sqrt{2} \sin x$ и отберите корни на $[-5\pi; -4\pi]$.
5. Решите $2 \sin^2 x - \sin 2x + \sin x = \cos x$ и отберите корни на $[0; \frac{3\pi}{2}]$.
6. Решите $4 \cos^3 x + \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$ и отберите корни на $[\pi; 2\pi]$.

Задания 1-3 соответствуют № 2, 3, 10 первого листа; задания 4-6 соответствуют № 8, 6, 28 второго листа.

Проверь себя перед сдачей

- **Период:** различаем общие формулы и частные случаи.
- **Все ветви:** решаем каждое уравнение после разложения на множители.
- **Сложный аргумент:** делим на коэффициент при x каждое слагаемое, включая периодическую часть.
- **Замена:** для синуса и косинуса проверяем $-1 \leq t \leq 1$; для тангенса этого ограничения нет.
- **Отбор:** проверяем каждую серию, отрицательные значения параметра и границы.
- **Ответ:** указываем целочисленность параметров, убираем повторы, учитываем ОДЗ.

Домашнее задание

Д1. Решите $\sin \left(8x + \frac{\pi}{8} \right) = 0$ и объясните, почему шаг между соседними корнями равен $\frac{\pi}{8}$ (первый лист, № 17).

Д2. Решите и отберите корни на $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ (второй лист, № 10):

$$2 \cos \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) \cos(2\pi - x) = \sqrt{3} \sin x.$$

Д3. Дополнительно. Решите и отберите корни на $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ (второй лист, № 14):

$$\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4 \cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0.$$

Ответы и пояснения для преподавателя

Во всех общих решениях ниже параметры n, k, m независимо принимают целые значения.

Самостоятельная работа

1. $\frac{\pi x}{4} = \pi + 2\pi n \Rightarrow x = 4 + 8n$. Наибольший отрицательный корень -4 при $n = -1$.

2. $\frac{\pi(x-4)}{3} = \pi n \Rightarrow x = 4 + 3n$. Наименьший положительный корень 1 при $n = -1$.

3. $x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. Ответ:

$$x = \pi + 2\pi n \text{ или } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

4. $-\sin 2x = \sqrt{2} \sin x \Rightarrow \sin x(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$.

$$x = \pi n \text{ или } x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

На отрезке: $-5\pi; -\frac{19\pi}{4}; -4\pi$. Обе границы отрезка являются корнями.

5. После замены $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ получаем:

$$(\sin x - \cos x)(2\sin x + 1) = 0.$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m.$$

На отрезке: $\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}$. В первой ветви можно использовать $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

6. $4\cos^3 x - \cos x = \cos x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$.

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m.$$

На отрезке: $\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}$.

Домашнее задание

Д1. $x = -\frac{\pi}{64} + \frac{\pi n}{8}$. Нули синуса повторяются при изменении аргумента на π ; аргумент $8x + \frac{\pi}{8}$ при этом меняется в 8 раз быстрее, чем x .

Д2. $\sin x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$. Все решения: $x = \pi n$ или $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. На отрезке: $-\pi; -\frac{5\pi}{6}; 0$.

Д3. Группировка даёт $2(\sin x + 2)(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$. Первая скобка не равна нулю. Во второй используем $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Все решения: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$. На отрезке: $\frac{\pi}{6}$.